KOMPLEKSNA ŠTEVILA

Poišči vse kompleksne rešitve enačbe

$$z^2 - 2i\,Re(z)\,Im(z) = z + i$$

$z = x + iy$

$Re(z) = x$

$Im(z) = y$

$z^2 = x^2 + 2xiy + iy^2$

$z^2 = x^2 + 2xiy - y^2$

$$x^2 + 2ixy - y^2 - 2ixy = x + iy + i$$

$$x^2 - y^2 - x - iy - i = 0$$

$$x^2 - y^2 - x + i(-y-1) = 0$$

Kompleksno število $=0$, ko je njegov realni in imaginarni del $=0$.

$$x^2 - y^2 - x = 0$$

$$-y - 1 = 0$$

$$\underline{\underline{y = -1}}$$

$$x^2 - 1 - x = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$a = 1$

$b = -1$

$c = -1$

$$D = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

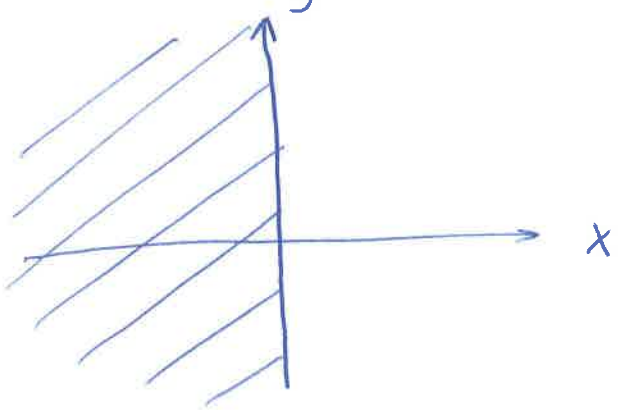
$$z = x + iy$$

$$\underline{\underline{z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} - i}}$$

V kompleksni ravnini skiciraj množico A, ki je podana na naslednji način: $z = x + iy$

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) < 0\}$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$$



ABSOLUTNA VREDNOST

Reši enačbo

$$|1-x-|1-x-|1-x|||=1$$

a) če je $1-x \geq 0$

$$|1-x-|\cancel{1}-\cancel{x}-\cancel{1}+x||=1$$

$$|1-x|=1$$

$$1-x=1$$

$$x_1=0 \checkmark$$

b) če je $1-x<0$

$$|1-x-|1-x-(-1+x)||=1$$

$$|1-x-|1-x+1-x||=1$$

$$|1-x-|2-2x||=1$$

$$|1-x-2|1-x||=1$$

$$|1-x+2-2x|=1$$

$$|3-3x|=1$$

$$3|1-x|=1$$

$$-3+3x=1$$

$$3x=4$$

$$x_2=\frac{4}{3} \checkmark$$

Matematična indukcija

Dokaži, da za vsako naravno število n velja $\sum_{i=1}^{n}(4+i) = \frac{n^2+9n}{2}$

$\boxed{\text{I.}}$ $n=1$: $4+1 = \frac{1^2+9\cdot1}{2}$

$5 = \frac{10}{2}$

$5=5$

Velja za $n=1$.

$\boxed{\text{II}}$ INDUKCIJSKA PREDPOSTAVKA:

predpostavimo, da velja za n

$$\sum_{i=1}^{n}(5-i) = \frac{n^2+9n}{2}$$

POMOČ: (vstavimo n+1)

$$\frac{(n+1)^2+9(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2+2n+1+9n+9}{2}$$

$\boxed{\text{III}}$ dokazujemo za n+1

$$\sum_{i=1}^{n+1}(4+i) = \sum_{i=1}^{n}(4+i) + (4+n+1) =$$

$$= \frac{n^2+9n}{2} + (4+(n+1)) =$$

$$= \frac{n^2+9n+10+2n}{2} =$$

$$= \frac{n^2+2n+1+9n+9}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)^2+9(n+1)}{2}$$

Dokaži, da je izraz $7^n(3n+1)-1$ deljiv z 9 za vsako naravno število n.

$\boxed{\text{I}}$ $n=1$

$7^1(3\cdot1+1)-1=7\cdot4-1=$

$=28-1=27=3\cdot9$

Velja za $n=1$.

$\boxed{\text{II}}$ INDUKCIJSKA PREDPOSTAVKA:

Predpostavimo, da velja za n.

$7^n(3n+1)-1=9k,\ k\in\mathbb{N}$

$\boxed{\text{III}}$ dokazujemo za $n+1$

$7^{n+1}(3(n+1)+1)-1=$

$=7\cdot7^n(3n+3+1)-1=$

$=(1+6)7^n(3n+3+1)-1=$

$=\underline{7^n(3n+1)}+6\cdot7^n(3n+1)+7^n\cdot3+6\cdot7^n\cdot3\underline{-1}=$

$=9k+7^n(6(3n+1)+3+6\cdot3)=$

$=9k+7^n(18n+6+3+18)=$

$=9k+7^n(18n+27)=$

$=9k+\underline{7^n(2n+3)}\cdot9$

$=\underline{\underline{9k+9n}}$

ŽAPOREDJA

$$a_n = \frac{5n-2}{n^2+n-1}$$

a) pokaži, da je zaporedje padajoče

$$a_{n+1} < a_n$$

$$a_{n+1} - a_n < 0$$

$$\frac{5(n+1)-2}{(n+1)^2+n+1-1} \leq \frac{5n-2}{n^2+n-1}$$

$$\frac{5n+5-2}{n^2+2n+1+n+\cancel{1}-\cancel{1}} \leq \frac{5n-2}{n^2+n-1}$$

$$\frac{5n+3}{n^2+3n+1} \leq \frac{5n-2}{n^2+n-1}$$

$$(5n+3)(n^2+n-1) \leq (5n-2)(n^2+3n+1)$$

$$5n^3+5n^2-5n+3n^2+3n-3 \leq 5n^3+15n^2+5n-2n^2-6n-2$$

$$8n^2-2n-3 \leq 13n^2-n-2$$

$$0 \leq 5n^2+n+1$$

$D = b^2-4ac = 1^2-4\cdot5\cdot1 = 1-20 = -19$ → NIMA REALNIH NIČEL

⊕: funkcija je povsod pozitivna, zato je zaporedje padajoče

b) določi natančno zgornjo in natančno spodnjo mejo zaporedja

→ ker je zaporedje strogo padajoče, je zgornja meja prvi člen zaporedja

$$a_1 = \frac{5n-2}{n^2+n-1} = \frac{5\cdot 1-2}{1^2+1-1} = \frac{3}{1} = 1$$

→ limita zaporedja je spodnja meja zaporedja.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{n^2+n-1} = \frac{\overset{0}{\overset{\|}{\frac{5}{n}}} - \overset{0}{\overset{\|}{\frac{2}{n^2}}}}{1+\underset{0}{\underset{\|}{\frac{1}{n}}}-\underset{0}{\underset{\|}{\frac{1}{n^2}}}} = 0$$